

1. Anwendung der Formeln

- 1) p-q-Formel: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$;
 **$x_1 = 4$; $x_2 = -2$.**
- 2) p-q-Formel: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-8}$; weil hier die Wurzel aus einer negativen Zahl auftritt,
 hat die Gleichung
 **keine Lösung.**
- 3) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0$; es existiert die
 **Doppellösung $x_1 = x_2 = 1$.**
- 4) Geordnet: $2x^2 - 12x + 18 = 0$; Division durch 2 für p-q-Formel:
 $x^2 - 6x + 9 = 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \pm 0$;
 **Doppellösung $x_1 = x_2 = 3$.**
- 5) Geordnet: $3x^2 - 21x + 30 = 0$; Division durch 3;
 $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{12,25 - 10} = 3,5 \pm 1,5$;
 **$x_1 = 5$; $x_2 = 2$.**
- 6) Ausmultipliziert: $2x^2 + 4x + x^2 + 6x + 10 = 2x^2 + 4x$
 Geordnet: $x^2 + 6x + 10 = 0$
 $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10}$; Wurzel aus einer negativen Zahl, also
 **keine Lösung.**
- 7) Geordnet: $x^2 - 5x = 0$; dies ist ein einfach lösbarer Sonderfall!
 $x \cdot (x - 5) = 0$; 1. oder 2. Teil = 0!
 **$x_1 = 0$; $x_2 = 5$.**
- 8) Ausmultipliziert mit der Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:
 $x^2 - 4 = 5$; und geordnet: $x^2 - 9 = 0$; wieder ein Sonderfall!
 $x^2 = 9$; x ist die Wurzel davon:
 **$x_1 = 3$; $x_2 = -3$.**
- 9) Binomische Formel: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
 damit ausmultipliziert: $10x^2 - 60x + 105 = 9x^2 - 60x + 100$
 geordnet: $x^2 + 5 = 0$; Sonderfall! $x^2 = -5$; es gibt dazu keine (reelle) Lösung.
 **keine Lösung.**

2. Mit symbolischen Konstanten

- 1) $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2} = -a \pm 3a$;
 **$x_1 = 2a$; $x_2 = -4a$.**
- 2) $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{5}{2}$; multipliziert mit $2ax$: $\frac{2ax \cdot x}{a} + \frac{2ax \cdot a}{x} = \frac{2ax \cdot 5}{2}$;
 gekürzt: $2x^2 + 2a^2 = 5ax$;
 geordnet für p-q-Formel: $x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 = 0$;
 $x_{1,2} = \frac{5}{4}a \pm \sqrt{\frac{25}{16}a^2 - a^2} = \frac{5}{4}a \pm \frac{3}{4}a$;
 **$x_1 = 2a$; $x_2 = 0,5a$**

3) $x^2 + (a^2 - a^3) \cdot x - a^5 = 0;$

Vorarbeit: $(a^2 + a^3)^2 = a^4 + 2a^5 + a^6$ und $(a^2 - a^3)^2 = a^4 - 2a^5 + a^6$

$$x_{1,2} = -\frac{a^2 - a^3}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2a^5 + a^6}{4} + a^5}$$

Ausdruck unter der Wurzel: $(a^4 - 2a^5 + a^6 + 4a^5) / 4 = (a^4 + 2a^5 + a^6) / 4.$

Durch Vergleich sieht man, dass dies $(a^2 + a^3)^2 / 4$ ist; damit

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 + a^3}{2} \pm \frac{a^2 + a^3}{2}; x_1 = -2a^2 / 2 = -a^2; x_2 = 2a^3 / 2 = a^3;$$

..... **$x_1 = -a^2; x_2 = a^3$**

4) $\frac{x+a}{a^2} = \frac{4a^2-1}{x-a}$; Umordnen: $(x+a) \cdot (x-a) = a^2 \cdot (4a^2-1);$

Ausmultiplizieren: $x^2 - a^2 = 4a^4 - a^2;$

Umordnen mit Kürzen von $(-a^2)$: $x^2 - 4a^4 = 0$; Sonderfall! $x_{1,2} = \pm \sqrt{4a^4} = 2a^2;$

..... **$x_1 = 2a^2; x_2 = -2a^2.$**

3. Mit Text in der Aufgabenstellung

1) $a^2 + b^2 = 13$ und $a = b + 5$

$b = a - 5$ in die erste Gleichung eingesetzt: $a^2 + (a - 5)^2 = a^2 + a^2 - 10a + 25 = 13$

geordnet nach Potenzen von a: $2a^2 - 10a + 12 = 0$

dividiert durch 2 für die p-q-Formel: $a^2 - 5a + 6 = 0$

Lösung: $a_{1,2} = +2,5 \pm \sqrt{6,25 - 6} = 2,5 \pm 0,5; a_1 = 3$ und $a_2 = 2$

b_1 und b_2 sind dann jeweils um 5 kleiner.

damit die 1. Lösung: **$a_1 = 3; b_1 = -2$**

und die 2.Lösung: **$a_2 = 2; b_2 = -3.$**

2) Die unbekannte Zahl ist x; dann gilt $x \cdot 2 \cdot (x + 1) + (x + 2)^2 = 244.$

Ausmultipliziert: $2x^2 + 2x + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x + 4 = 244;$

Geordnet: $3x^2 + 6x - 240 = 0$; dividiert durch 3 für p-q-Formel: $x^2 + 2x - 80 = 0;$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 80} = -1 \pm 9; x_1 = 8; x_2 = -10$ ist nicht positiv.

Die Lösung für x ist daher: **$x = 8$**

3) $L \cdot B = 21$ und $2L + 2B = 20$

$B = (20 - 2L) / 2 = 10 - L$ eingesetzt: $L \cdot (10 - L) = 10L - L^2 = 21$

geordnet und p-q-Formel: $L^2 - 10L + 21 = 0; L_{1,2} = +5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2;$

$L_1 = 7; L_2 = 3$

Lösung mit L_1 : **$L = 7; B = 3$**

Die zweite Lösung verwendet L_2 ; rechnerisch ist dann $L = 3; B = 7$. Das ist natürlich auch richtig, weil damit die Fläche und der Umfang stimmen; "gefühlsmäßig" erwarten wir, dass die Länge größer als die Breite ist, und geben daher der 1. Lösung den Vorzug.

4) (1) $a = 2b - 2$; (2) $(a + b)^2 = 49 = a^2 + 2ab + b^2$;
 (1) in (2) eingesetzt: $(2b - 2)^2 + 2b \cdot (2b - 2) + b^2 = 49$;
 Ausmultipliziert: $4b^2 - 8b + 4 + 4b^2 - 4b + b^2 - 49 = 0$;
 Geordnet: $9b^2 - 12b - 45 = 0$; dividiert durch 9: $b^2 - \frac{4}{3}b - 5 = 0$;

$$b_{1,2} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\frac{16}{36} - (-5)} = \frac{4}{6} \pm \sqrt{\frac{16 + 180}{36}} = \frac{4}{6} \pm \frac{14}{6}; b_1 = 3;$$

die zweite Lösung $b_2 = \frac{-10}{6}$ liefert keine positive ganze Zahl, wie in der Aufgabenstellung verlangt. $a = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ **a = 4; b = 3.**

4. "Chemische" Rechnungen

1) $0,05 \cdot (2 - x) \cdot (3 - x) = 0,05 \cdot (6 - 3x - 2x + x^2) = 0,05 \cdot (6 - 5x + x^2)$
 $= 0,3 - 0,25x + 0,05x^2 = x$

geordnet: $0,05x^2 - 1,25x + 0,3 = 0$;

Division durch 0,05 für die p-q-Formel: $x^2 - 25x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = 12,5 \pm \sqrt{156,25 - 6} = 12,5 \pm 12,2577$$

$$x_1 = 0,24235 \approx 0,24$$

$$x_2 = 24,7565; \text{ (dies ist chemisch nicht möglich, weil dann } (2 - x) \text{ und } (3 - x) \text{ nicht mehr positiv sind.)}$$

..... **x ≈ 0,24**

2) In symbolischer Form: $K \cdot (c - x) = Kc - Kx = x^2$;

geordnet: $x^2 + Kx - Kc = 0$; p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} + Kc}$

mit Zahlenwerten: $x_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{6,25 + 7,5} = -2,5 \pm 3,708099$;

$$x_1 = 1,208099 \approx 1,21$$

$$x_2 = -6,208099 \text{ (der negative Wert ist aus chemischen Gründen nicht möglich.)}$$

..... **x ≈ 1,21**

3) In symbolischer Form: $K - \alpha K = \alpha^2 c$;

geordnet: $\alpha^2 c + \alpha K - K = 0$;

p-q-Formel: $\alpha^2 + (K/c)\alpha - K/c = 0$ und $\alpha_{1,2} = \frac{-K}{2c} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4c^2} + \frac{K}{c}}$

$$\text{allgemeine Formel: } \alpha_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4c \cdot (-K)}}{2c} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + 4Kc}}{2c}$$

Zahlenwerte:

p-q-Formel: $-0,018 \pm \sqrt{0,000324 + 0,036} = -0,018 \pm 0,190588$;

$$\alpha_1 = 0,17259 \approx 0,173;$$

$$\alpha_2 = -0,20859 \text{ (der negative Wert ist aus chemischen Gründen nicht möglich.)}$$

allgemeine Formel: $(-1,8 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{3,24 \cdot 10^{-10} + 3,6 \cdot 10^{-8}}) / 10^{-3} =$

$$(-1,8 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{3,24 \cdot 10^{-10} + 3,6 \cdot 10^{-8}}) / 10^{-3} =$$

$$(-1,8 \cdot 10^{-5} \pm 1,9059 \cdot 10^{-4}) / 10^{-3};$$

$$\alpha_1 = 0,17259; \alpha_2 = -0,20859$$

..... **α ≈ 0,173**